ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, Epoca Recurso** **28. 06. 11**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_1$; $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\bar{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2},\ s<\dfrac{1}{2}$; $(nS^2)/\sigma^2\sim\chi^2_{(n-1)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10]*.

1. Considere uma partição $\{A_1,A_2,A_3\}$ do espaço de resultados Ω e sejam B e C acontecimentos de Ω com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Os acontecimentos A_i $(i=1,2,3)$ são independentes.		
$U_{i=1}^3 A_i=\Omega$ e $A_i\cap A_j=\phi$ $(i\neq j)$.		
$P(B\cap C)=P(B\cap C\|A_1)\times P(A_1)+P(B\cap C\|A_2)\times P(A_2)+\ P(B\cap C\|A_3)\times P(A_3)$.		
Admita que B e C são acontecimentos incompatíveis. Então $P(B-C)=P(B)$.		

2. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição $F(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $a<b<c$ números reais e $P(X>c)>0$. Tem-se $P(X>a\|X>c)=P(X>b\|X>c)$.		
Sejam X uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y=X/2$. Então $G(y)=1-F(2y)$		
$\forall\, x\in\mathbb{R}, F(x+0)-F(x)=0$ seja *X* contínua, discreta ou mista.		
Se X é uma variável mista e **a** um ponto de continuidade de $F(x)$, então $P(X\leq a)>P(X<a)$		

3. Seja $f(x,y)$ a função densidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X,Y). Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua *X* é assimétrica positiva e seja μ_e a respectiva mediana. Então $P(X>\mu_e)<0.5$.		
Se X é uma variável aleatória com $E(X)=\mu$; $Var(X)=\sigma^2$ e $Y=(3X-2)/\sigma$, então $Var(Y)=9$.		
Se $\text{cov}(X,Y)\neq 0$ então X e Y não são independentes,		
$P(Y\leq a)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$		

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim B(n, \theta) \Rightarrow Y = n - X \sim B(n - x, \theta)$.		
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = -X \sim N(-\mu, \sigma^2)$.		
X é uma variável contínua com $F(x)$ estritamente crescente. Seja $Y = F(X)$. Qualquer que seja a distribuição de X, $Y \sim U(0, 1)$.		
Considere um processo de Poisson com taxa média λ por minuto. Então o tempo médio, em minutos, de espera por uma ocorrência nesse processo é $1/\lambda$.		

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O valor esperado da variância corrigida da amostra coincide com a variância da população.		
$(X_{(n)} - X_{(1)})/\sigma$ é uma estatística.		
$Cov(X_i, X_j) \neq 0 \ \ (i \neq j)$		
$P(X_i \leq x) = F(x) \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$		

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro λ inteiro $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$.

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos *A*, *B*,*C* $\subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade:$P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$. [cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\emptyset$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0, x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1, x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi_1^2$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $(nS^2)/\sigma^2\sim\chi^2_{(n-1)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1. Considere uma partição $\{A_1, A_2, A_3\}$ do espaço de resultados Ω e sejam B e C acontecimentos de Ω com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva:*

	V	F
Os acontecimentos A_i $(i=1,2,3)$ são incompatíveis		
Os acontecimenentos $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ são mutuamente independentes		
Nestas condições tem-se sempre $P(B-C)\geq P(B)$		
Se $B\subset A_2 \Rightarrow P(B)=P(B\mid A_2)P(A_2)$		

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}, a<b<c$ e $P(X<b)>0$. Então $P(X<c\mid X<b)>P(X<a\mid X<b)$.		
Sejam *X* uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y=1-X$. Então $G(y)=1-F(1-y)$.		
$\forall\, x\in\mathbb{R}, F(x-0)-F(x)=0$ se *X* é uma variável aleatória contínua.		
Se X é uma variável aleatória mista, então existe pelo menos um ponto de descontinuidade de $F(x)$.		

3. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua X é assimétrica negativa e seja μ_e a respectiva mediana. Então $P(X<\mu_e)<0.5$.		
Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional. Se $Cov(X,Y)=0$, X e Y podem não ser independentes		
Se X é uma variável aleatória com $E(X)=\mu$; $Var(X)=\sigma^2$ e $Y=(X-\mu^2)/\sigma^2$, então $Var(Y)=1/Var(X)$.		
Se $M(s)$ é uma função geradora de momentos, então $M(0)=1$		

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow Y = n - X \sim B(n-x; 1-\theta)$.		
Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = F(X) \sim U(0,1)$		
Considere um processo de Poisson com taxa média λ por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o tempo de espera pela primeira ocorrência. Então $E(Y) = 1/\lambda$.		
Se X_i $(i = 1; \cdots, n)$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal standardizada, então $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$		

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
$P(X_1 < x, X_2 < x, \cdots, X_n < x) = [F(x)]^n$		
$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)/\left(\sigma\sqrt{n}\right)$ é uma estatística		
Se existe $Var(X)$ então $Var(\bar{X}) \to 0$ quando $n \to \infty$		
O valor esperado da variância da amostra sobre avalia a variância da população		

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro λ inteiro $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$.

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos A, B,$C \subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade: $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$. [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x\,!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi_1^2$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $(nS^2)/\sigma^2\sim\chi^2_{(n-1)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1 Considere A_1, A_2, A_3 acontecimentos do espaço de resultados Ω, incompatíveis 2 a 2, com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$, então A_1, A_2, A_3 formam uma partição de Ω		
A_1, A_2, A_3 são acontecimentos mutuamente independentes		
$P(A_1-A_2)=P(A_1)$		
Se A_1, A_2, A_3 formam uma partição de Ω, então $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$		

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$.
Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Sejam $a<b<c$ números reais e $P(X<c)>0$. Tem-se $P(X<a\|X<c)<P(X<b\|X<c)$.		
Se *X* é uma variável aleatória mista, não existem pontos de descontinuidade de $F(x)$.		
Sejam *X* uma variável aleatória contínua e $G(y)$ a função distribuição de $Y=-X$. Então $G(y)=1-F(-y)$		
Se *X* for discreta $\forall\ x\in\mathbb{R}, F(x-0)-F(x)=0$.		

3. Seja $f(x,y)$ a função densidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X,Y). Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua X é assimétrica positiva e seja μ_e a respectiva mediana. Então $P(X>\mu_e)=0.5$.		
$Se\ Cov(X,Y)=0$, então X e Y são independentes		
Se X é uma variável aleatória com $E(X)=\mu; Var(X)=\sigma^2$ e $Y=2X/\sigma^2$, então $Var(Y)=4$		
$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx$		

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim U(a, a+1)$ $\forall$ a $\in$ $\mathbb{R}$ então a probabilidade de qualquer sub-intervalo nele contido é igual ao seu comprimento		
Se X_i $(i = 1, \cdots, n)$ forem independentes com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então $\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu)/\sigma)^2 \sim \chi^2_{(2n)}$		
Considere um processo de Poisson com taxa média 5 por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o número de ocorrências em certo intervalo . Então $P(2 < Y < 3) = 0$		
Se $X_i \sim B(1, \theta)$ $(i = 1, \cdots, n) \Rightarrow n\bar{X} \sim B(n, \theta)$		

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual simples retirada de um universo X. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma estatística		
A variância da média da amostra é igual à variância da população		
$Cov(X_i, X_j) = 0$ $(i \neq j)$		
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \bar{X})/\sigma]^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$		

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro λ inteiro $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$.

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos *A*, *B*,*C* $\subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade: $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$. [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\text{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\text{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}=E(XY)-E(X)E(Y)$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY)=a^2\text{Var}(X)+b^2\text{Var}(Y)+2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow f(x)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}(n>1,x=0,1,\cdots,n)$

$X\sim N(0,1)\Rightarrow X^2\sim\chi^2_1$; $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}-\overline{X}^2$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

$X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\text{Var}(X)=2n$; $M_X(s)=(1-2s)^{-n/2}, s<\dfrac{1}{2}$; $(nS^2)/\sigma^2\sim\chi^2_{(n-1)}$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

1 Considere uma partição $\{A_1,A_2,A_3\}$ do espaço de resultados Ω e sejam B e C acontecimentos de Ω com probabilidade positiva. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
$P(B-C)\leq P(B)$.		
Nestas condições tem-se sempre $P[A_1\mid A_2\cup A_3]=0$		
Os acontecimentos A_1,A_2,A_3 são mutuamente independentes.		
Os acontecimentos A_i $(i=1,2,3)$ são acontecimentos incompatíveis.		

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição $F(x)$ e D_X o respectivo conjunto de pontos de descontinuidade Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $a,b\in D_X$, $a<b$, $\Rightarrow P(a\leq X<b)=F(b-0)-F(a)$.		
Se φ é uma função real de variável real, $Y=\varphi(X)$ pode não ser uma variável aleatória discreta.		
$\forall\, a\in D_X$ $F(a+0)=F(a)$.		
$E(X)$ pode assumir valores que não pertençam ao conjunto D_X		

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função probabilidade conjunta $f(x,y)$.Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se *X* é uma variável aleatória com $E(X)=\mu; Var(X)=\sigma^2$ e $Y=(X-\mu)^2/\sigma^2$, então $E(Y)=1$.		
A $Cov(X,Y)$ pode ser nula mesmo que *X* e *Y* não sejam independentes		
Se $D_X=\{1,\cdots,5\}, D_Y=\{0,1,2\}$ a $P(Y<2)=\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=1}^{5}f(x,y)$		
Suponha que a distribuição de uma variável aleatória contínua *X* é simétrica e seja μ_e a respectiva mediana. Então $P(X>\mu_e)<0.5$.		

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
Se $X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow Y = F(X) \sim U(0,1)$.		
Seja $X_i \sim N(0,1)$ $(i = 1, \cdots, n)$ independentes, então $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$.		
Considere um processo de Poisson com taxa média λ por unidade de tempo. Seja Y a variável aleatória que representa o tempo de espera pela n-ésima ocorrência. Então $E(Y) = n/\lambda$.		
Se $X_i \sim B(1, \theta)$ $(i = 1, \cdots, n)$ independentes então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, n\theta)$.		

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X com média e variância desconhecidas. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
O valor esperado da variância da amostra sub-avalia a variância da população.		
nS^2/σ^2 é uma estatística.		
Se $X \sim t_{(m)}$ então X tende assintoticamente para $N(0,1)$ quando $m \to \infty$		
$P(X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x) = [1 - F(x)]^n$.		

6. Mostre que numa distribuição de Poisson de parâmetro λ inteiro $P(X = \lambda) = P(X = \lambda - 1)$.

[Cotação: 15]

7. Sejam os acontecimentos A, B,$C \subset \Omega$ com probabilidades não nulas e mutuamente independentes. Justifique a igualdade: $P(A - B|C) = P(A)P(\bar{B})$. [Cotação: 15]

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

(**Nota: Nas questões de resposta múltipla, uma resposta errada será penalizada com -2,5**)

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente dez contribuintes médios para análise das declarações. Calcule a probabilidade de duas declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,1937 ☐ 0,9298 ☐ 0,3874 ☐ 0,7361 ☐

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que $f_X(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ e estude a independência das variáveia aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória $W = 2X - 2$. Calcule a $P(W < -1)$.

$\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{16}$ ☐ 1 ☐ $\frac{27}{64}$ ☐

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 80% dos casos.

12.56 ☐ 11.68 ☐ 11.05 ☐ 10.51 ☐

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 15 minutos entre a correcção de duas provas consecutivas?

0.2865 ☐ 0.7135 ☐ 0.6446 ☐ 0.8685 ☐

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações				
1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

(**Nota: Nas questões de resposta múltipla, uma resposta errada será penalizada com -2,5**)

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente dez contribuintes grandes para análise das declarações. Calcule a probabilidade de quatro declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,9984 ☐ 0,0112 ☐ 0,0881 ☐ 0,9672 ☐

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que $f_X(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória $W = X + 3$. Calcule a $P(W < 3.25)$.

0.1250 ☐ 0.4219 ☐ 0.0156 ☐ 0.0640 ☐

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 70% dos casos.

12.56 ☐ 11.68 ☐ 11.05 ☐ 10.51 ☐

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 30 minutos entre a correcção de duas provas consecutivas?

0.6767 ☐ 0.4601 ☐ 0.1353 ☐ 0.8647 ☐

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.

.

Nome:____**Número:**________

Espaço reservado para classificações

1a.(20)	2a.(20)	3a.(10)	4a.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

(**Nota: Nas questões de resposta múltipla, uma resposta errada será penalizada com -2,5**)

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente oito contribuintes médios para análise das declarações. Calcule a probabilidade de três declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,1488 ☐ 0,9950 ☐ 0,0331 ☐ 0,9619 ☐

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x, y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que $f_X(x) = 3x^2, \ 0 < x < 1$ e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória $W = 2X + 2$. Calcule a $P(W < 3.5)$.

0.1250 ☐ 0.4219 ☐ 0.0156 ☐ 0.0640 ☐

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 90% dos casos.

12.56 ☐ 11.68 ☐ 11.05 ☐ 10.51 ☐

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 6 minutos entre a correcção de duas provas consecutivas?

0.9856 ☐ 0.6065 ☐ 0.9098 ☐ 0.3935 ☐

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações				
1ª.(20)	2ª.(20)	3ª.(10)	4ª.(10)	T:
1b.(10)	2b.(10)	3b.(20)	4b.(20)	P:

(**Nota: Nas questões de resposta múltipla, uma resposta errada será penalizada com -2,5**)

1. Os contribuintes de IRS, estão para efeitos estatísticos, divididos em 3 categorias: pequenos, médios e grandes, respectivamente nas seguintes proporções: 0.5, 0.4, 0.1. Com base na experiência de anos anteriores, sabe-se que as probabilidades de declarações com erros e omissões são de 1%, 10% e 20% respectivamente para contribuintes pequenos, médios e grandes.

a) Uma das declarações continha erros. Qual a probabilidade de que seja de um contribuinte classificado como médio?

b) O computador da DGCI vai seleccionar aleatoriamente seis contribuintes grandes para análise das declarações. Calcule a probabilidade de três declarações de contribuintes conterem erros e as restantes não?

0,9830 ☐ 0,0146 ☐ 0,9987 ☐ 0,0819 ☐

2. Sejam as variáveis X e Y com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = 9x^2y^2 \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

a) Verifique que $f_X(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ e estude a independência das variáveis aleatórias X e Y.

b) Considere a variável aleatória $W = X - 3$. Calcule a $P(W < -2.6)$.

0.1250 ☐ 0.4219 ☐ 0.0156 ☐ 0.0640 ☐

3. A resistência à fractura de um novo tipo de material de soldadura é uma variável aleatória com distribuição normal de média 10 e variância 4.

a) Determine um limite máximo de resistência à fractura que se verifique em 60% dos casos.

12.56 ☐ 11.68 ☐ 11.05 ☐ 10.51 ☐

b) Tendo sido seleccionada uma amostra casual de dimensão 9 desse material, qual a probabilidade de que a média da resistência dos elementos da amostra difira da média da população por valores inferiores a 0,1?

4. Um professor corrige exames ininterruptamente. A correcção de exames segue um processo de Poisson com taxa média de 5 por hora.

a) Qual a probabilidade de decorrerem mais de 9 minutos entre a correcção de duas provas consecutivas?

0.8266 ☐ 0.5276 ☐ 0.9595 ☐ 0.4724 ☐

b) Seleccionada uma amostra de tempos de correcção de 5 provas, qual a probabilidade de a prova corrigida em menos tempo ter sido corrigida em menos de 12 minutos.